

MODELISATION DE LA CONVECTION NATURELLE AU SEIN D'UNE COUCHE POREUSE HORIZONTALE A L'AIDE D'UN COEFFICIENT DE TRANSFERT SOLIDE-FLUIDE

M. COMBARNOUS et S. BORIES

Groupe d'Etude I.F.P., I.M.F. sur les Milieux Poreux, 2. Rue Camichel, Toulouse, France

(Reçu le 19 juillet 1973)

Résumé—Le concept de coefficient de transfert a été utilisé pour la modélisation en régime permanent de mouvements thermoconvectifs en milieu poreux. Les résultats numériques obtenus, largement représentatifs de la réalité expérimentale, mettent en évidence l'influence, sur le transfert de chaleur moyen, du degré de division du milieu et des caractéristiques thermiques des phases le constituant.

NOMENCLATURE

<p>a, surface spécifique du milieu poreux;</p> <p>d, diamètre des particules constituant le milieu expérimental;</p> <p>d_p, diamètre moyen des pores;</p> <p>g, accélération de la pesanteur;</p> <p>h, coefficient de transfert par unité de volume de milieu;</p> <p>j, facteur de Colburn = $\{h/[a(\rho c)_f V]\} [(\rho c)_f v/\lambda_f]^{2/3}$;</p> <p>$t$, temps;</p> <p>$t'$, temps de référence;</p> <p>x, z, coordonnées adimensionnelles: $x = x'/L$; $z = z'/H$;</p> <p>x', z', coordonnées;</p> <p>A, taille réduite d'une cellule de convection H/L;</p> <p>H, hauteur de la couche poreuse;</p> <p>K, perméabilité;</p> <p>L, largeur d'un rouleau convectif;</p> <p>T, température: $T_2 = T_1 + \Delta T$;</p> <p>U, vitesse horizontale adimensionnelle: $V_x H(\rho c)_f/\lambda_f^*$;</p> <p>$V$, vitesse de filtration de composantes V_x, V_z;</p> <p>W, vitesse verticale adimensionnelle: $V_z H(\rho c)_f/\lambda_f^*$.</p>	<p>ν, viscosité cinématique du fluide;</p> <p>ω, coefficient de surrelaxation;</p> <p>(ρc), chaleur volumique (à pression constante);</p> <p>τ, temps sans dimension, temps fictif;</p> <p>ΔT, écart de température;</p> <p>$\Delta \tau$, pas de temps fictif;</p> <p>Δx, pas d'espace;</p> <p>Θ, température du solide adimensionnelle: $(T_s - T_1)/\Delta T$;</p> <p>ψ, fonction de courant.</p> <p style="text-align: center;">Nombres sans dimension</p> <p>Nu^*, nombre de Nusselt;</p> <p>$Nu_n^*(J)$, nombre de Nusselt estimé numériquement pour la ligne d'indice J, le maillage de calcul étant $n \times n$;</p> <p>Ra^*, nombre de Rayleigh de filtration, $= g \frac{\alpha(\rho c)_f K}{\nu} \frac{K}{\lambda^*} \Delta T H$;</p> <p>$Re^*$, nombre de Reynolds de filtration $V d_p/\nu$;</p> <p>ω, $\varepsilon(\rho c)_f H^2/(t' \lambda_f^*)$;</p> <p>$\Lambda$, λ_f^*/λ_s^*;</p> <p>Ω, $(1-\varepsilon)(\rho c)_s H^2/(t' \lambda_s^*)$;</p> <p>$\gamma$, $h H^2/\lambda_f^*$.</p>
<p>Lettres grecques</p> <p>α, coefficient (conditions initiales) (Annexe A);</p> <p>α, coefficient d'expansion thermique du fluide;</p> <p>ε, porosité;</p> <p>θ, température du fluide adimensionnelle: $(T_f - T_1)/\Delta T$;</p> <p>λ, conductivité thermique;</p>	
<p>Indices ou exposants</p> <p>$*$, caractérise une grandeur définie en milieu poreux;</p> <p>f, fluide;</p> <p>s, solide;</p> <p>p, pore ($d_p =$ diamètre de pore moyen);</p>	

- i , indice unique de noeuds du maillage:
 $i = 2[(J-2)(n-1) + I - 1] - 1$ pour fluide
 $i = 2[(J-2)(n-1) + I - 1]$ pour solide;
- I, J , couple d'indices désignant un noeud du maillage;
- n , nombre de mailles sur un côté du rouleau;
- r , indice d'itération (calcul des ψ);
- N , $2(n-1)$.

INTRODUCTION

LA CONVECTION naturelle d'origine thermique, qui se développe dans une couche poreuse homogène horizontale, a toujours été décrite en supposant le comportement thermique du milieu poreux, identique à celui d'un milieu continu fictif unique. Dans cette acception, le transfert de chaleur n'est régi que par une seule équation :

$$\text{div}(\lambda^* \text{grad } T) - \text{div}[(\rho c)_f T \vec{V}] = \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c)^* T] \quad (1)$$

et ne dépend que du nombre de Rayleigh de filtration Ra^* et d'une grandeur caractéristique de l'extension des mouvements convectifs.

En régime permanent, lorsque la couche poreuse est limitée par des surfaces isothermes et imperméables, les mouvements thermoconvectifs présentent une structure stable lorsque $Ra^* \in [40; 240-280]$ [3, 5] et sont caractérisés par la juxtaposition de cellules polyédriques ou de rouleaux dont les effets sont équivalents du point de vue des transferts globaux qu'ils induisent.

Un modèle numérique que nous désignerons dans la suite de ce texte par Conath 1 a été récemment utilisé [4-7] pour décrire les mécanismes hydrodynamique et thermique au sein d'un rouleau convectif à deux dimensions satisfaisant aux conditions aux limites réalisées dans les études expérimentales. Ce modèle qui utilise la description schématique du transfert de chaleur donnée par l'équation (1) a permis d'apprécier l'évolution du nombre de Nusselt en fonction des deux paramètres caractéristiques: le nombre de Rayleigh de filtration Ra^* et l'extension réduite A des rouleaux convectifs (Fig. 1).

Pour la comparaison avec l'expérience, seuls les maximums des courbes $Nu^* = f(A)$ ont été retenus [5].

Si la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux est satisfaisante pour certains types de milieux poreux, on remarquera cependant que le caractère biunivoque de la relation numérique Nu^*-Ra^* ainsi obtenue ne traduit que très imparfaitement la réalité physique des phénomènes. En effet, comme l'indiquent les résultats expérimentaux (Fig. 2), le transfert de chaleur dépend, non seulement de Ra^* mais aussi des caractéristiques du milieu, de sa texture et des propriétés thermiques des phases solide et fluide le constituant.

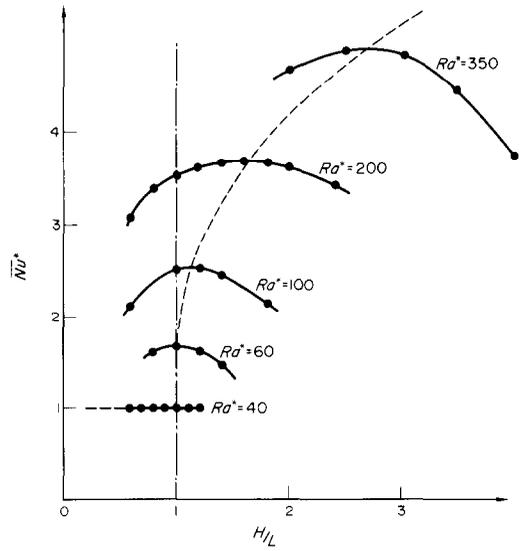


FIG. 1. Résultats numériques obtenus à l'aide du modèle classique Conath 1 [3, 5].

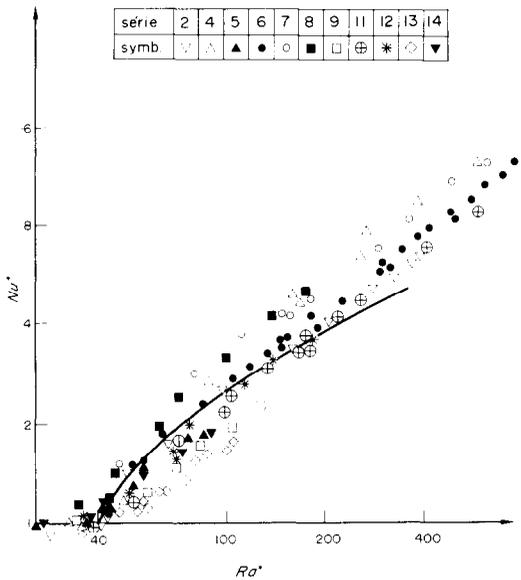


FIG. 2. Résultats expérimentaux [3, 5] comparés aux résultats obtenus à l'aide de Conath 1 [3, 5] (—).

Afin de tenter d'obtenir une représentation plus fidèle des phénomènes observés, nous avons réalisé un modèle numérique qui prend en compte une description plus fine du transfert de chaleur, au sein du milieu poreux. Cette description distingue, dans un volume élémentaire du milieu, les températures de la phase fluide et de la phase solide, les échanges de chaleur entre les deux phases étant explicités à l'aide d'un coefficient de transfert.

2. MODELE MATHEMATIQUE DECRIVANT LE TRANSFERT DE CHALEUR

Le transfert de chaleur dans le milieu poreux s'exprime l'aide de deux équations, chacune d'elles décrivant le phénomène dans un milieu continu fictif équivalent à l'une des phases fluide ou solide:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda_f^* \overline{\operatorname{grad}} T_f) - \operatorname{div}[(\rho c)_f T_f \vec{V}] \\ = \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon(\rho c)_f T_f] + h(T_f - T_s) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_s^* \overline{\operatorname{grad}} T_s) = \frac{\partial}{\partial t} [(1-\varepsilon)(\rho c)_s T_s] + h(T_s - T_f). \quad (3)$$

Le système d'équations (2) et (3), qui constitue une amélioration nette du mode de description du transfert de chaleur par rapport à l'équation (1), est utilisé en génie chimique où les vitesses de filtration des fluides sont importantes. Son emploi n'avait pas été, jusqu'à présent, envisagé dans l'interprétation d'expériences faites sur des milieux poreux, dont on pouvait supposer le degré de division suffisant pour que soit valable le concept de coefficient de conductivité équivalente.

L'écriture du système (2)-(3) appelle deux types de commentaires:

Dans l'écriture des termes de conduction, nous avons supposé, comme dans l'équation (1), que les tenseurs de conductivité thermique équivalente sont sphériques. Les scalaires λ_f^* et λ_s^* sont bien sûr différents des coefficients de conductivité thermique propres λ_f et λ_s des constituants du milieu, mais dépendent également, entre autres paramètres:

- pour λ_f^* , de la dispersion *hydrodynamique* due à la présence du squelette solide,
- pour λ_s^* , de l'état de division de la phase solide.

Le transfert de chaleur d'une phase à l'autre est explicité à l'aide du coefficient de transfert h . Une analyse dimensionnelle des mécanismes de conduction à l'échelle du pore montre que h dépend des caractéristiques thermiques (conductivité et chaleur volumique) des phases fluide et solide, de la porosité et d'une dimension caractéristique du milieu poreux (perméabilité ou diamètre de pore, de grain, de fibre).

Nous remarquerons enfin que, si l'on suppose $T_f = T_s$ (coefficient de transfert infini entre les deux phases), la sommation terme à terme des équations (2) et (3) doit conduire à l'équation (1). D'où:

$$\lambda^* = \lambda_f^* + \lambda_s^* \quad (4)$$

$$(\rho c)^* = \varepsilon(\rho c)_f + (1-\varepsilon)(\rho c)_s. \quad (5)$$

Si la relation (5) n'est pas surprenante (additivité des enthalpies, donc des chaleurs volumiques), la relation (4) est utile pour apprécier la signification des coefficients λ_f^* et λ_s^* .

3. MODELE MATHEMATIQUE COMPLET D'UN ROULEAU CONVECTIF SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

Comme dans l'étude numérique utilisant l'équation (1) [5], nous étudions les distributions de températures et de vitesse, ainsi que le transfert de chaleur moyen, dans le cas d'un rouleau convectif à deux dimensions, de hauteur H et de largeur L . Les limites horizontales du rouleau sont imperméables et isothermes (températures T_1 et $T_2 = T_1 + \Delta T$) les limites verticales sont imperméables et adiabatiques (Fig. 3). Seul le régime permanent est étudié.

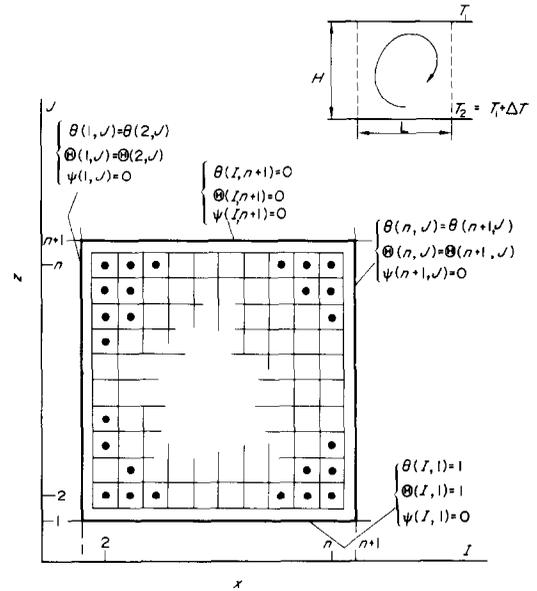


FIG. 3. Description du maillage adopté; conditions aux limites.

3.1 Equation du mouvement en régime permanent

En régime permanent, l'équation décrivant l'écoulement de filtration peut s'écrire, sous forme adimensionnelle, en utilisant le concept de fonction de courant [3, 4]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + A \cdot Ra^* \cdot \frac{\lambda^*}{\lambda_f^*} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad W = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

3.2 Transfert de chaleur (régimes transitoire et permanent)

En utilisant un temps de référence t' (temps adimensionnel $\tau = t/t'$), les équations de transfert de chaleur, écrites sous forme adimensionnelle, auxquelles satisfont

θ et Θ se déduisent de (2)–(3) soit:

$$A^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - A \left[U \frac{\partial \theta}{\partial x} + W \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \chi [\theta - \Theta] + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (8)$$

$$A^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \chi \Lambda [\Theta - \theta] + \Omega \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \quad (9)$$

avec:

$$\chi = hH^2/\lambda_s^*; \quad \Lambda = \lambda_s^*/\lambda_s^* \quad (10)$$

3.3 Nombres sans dimension

Les courants convectifs étant décrits par le système d'équations (6) à (9), en régime permanent, le phénomène dépend des nombres sans dimensions:

$$Ra^*, \quad A = H/L, \quad \Lambda = \lambda_s^*/\lambda_s^*, \quad \chi = hH^2/\lambda_s^* \quad (11)$$

Le dernier de ces nombres χ pouvant être explicité sous la forme d'un produit de deux nombres sans dimension:

$$\chi = \frac{hK}{\lambda_s^*} \cdot \frac{H^2}{K} \quad \text{ou} \quad \frac{hd^2}{\lambda_s^*} \left(\frac{H}{d} \right)^2 \quad (12)$$

permet de dégager en outre:

- l'influence du transfert de chaleur à l'échelle locale décrite par hd^2/λ_s^* ,
- l'influence du degré de division du milieu, par rapport à l'extension verticale du rouleau, soit $(H/d)^2$.

Nous remarquerons enfin, que la description du régime transitoire fait apparaître deux nombres adimensionnels supplémentaires:

$$\varepsilon/(1-\varepsilon) \quad (\rho c)_f/(\rho c)_s \quad (13)$$

Toutefois, la liste (11)–(13) n'est pas exhaustive, puisque les termes correspondant au régime transitoire d'écoulement ne figurent pas dans l'équation (6).

4. RESOLUTION NUMERIQUE

Le régime permanent est la limite vers laquelle tend un régime transitoire fictif, lorsque τ tend vers l'infini. Les équations (6), (7), (8) et (9) sont remplacées par des relations approchées aux différences sur un maillage $n \times n$. Les distributions de température et de fonction de courant étant connues au temps τ , la distribution de température à $\tau + \Delta\tau$ est déterminée par une méthode implicite; les fonctions de courant sont ensuite calculées par surrelaxation par point.

Nous présentons dans l'Annexe A l'ensemble des différents éléments de calcul qui ont permis la rédaction du programme, à savoir;

- a—distribution de température,
- b—distribution de fonction de courant,
- c—champ de vitesse,
- d—conditions initiales du calcul,
- e—transfert de chaleur global.

Certains de ces éléments (b, c, d) sont identiques à ceux utilisés dans le modèle simplifié [5].

La plupart des résultats numériques ont été obtenus avec un maillage relativement lâche. Dans ces conditions, la résolution des équations à l'aide d'un système de relations aux différences ainsi que la méthode d'estimation des nombres de Nusselt (voir Annexe A) conduisent à des résultats qui ne sont qu'approchés. Le caractère approximatif des résultats est sensible de deux manières:

- bien que la solution corresponde à un régime thermique permanent, le transfert de chaleur global calculé à travers une section horizontale ($J = \text{constante}$) n'est pas indépendant de J .
- la valeur moyenne

$$\overline{Nu_n^*} = \left[\sum_{J=1}^n Nu_n^*(J) \right] / n$$

est fonction du maillage.

Ces deux effets, sensibles aussi bien avec le modèle simplifié (Conath 1) qu'avec le modèle plus complet présenté ici (Conath 2), sont illustrés sur la Fig. 4.

Nous avons choisi, pour l'analyse du comportement physique du modèle numérique, la valeur $Nu_{n=4}^*(5)$ comme représentative du transfert de chaleur moyen. Pour préciser l'importance de l'erreur commise en ce qui concerne l'approche quantitative du transfert de chaleur, indiquons que l'utilisation du modèle Conath 1

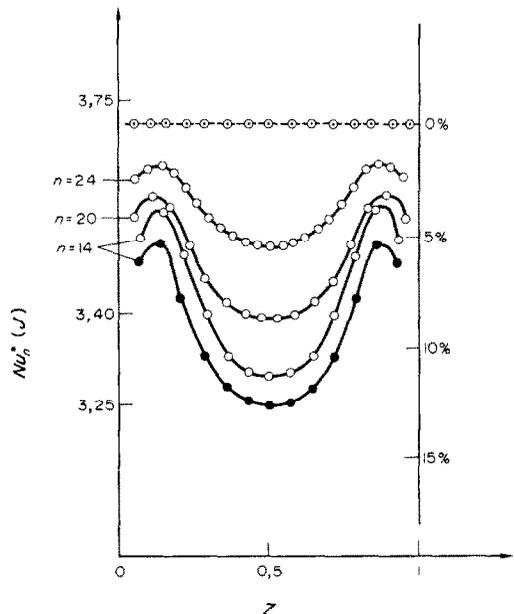


FIG. 4. Influence du maillage sur $Nu_n^*(J)$ [$H/L = 1, Ra^* = 200$]: (a) Conath 1 pour $n = 14, 20$ et 24 (—○—) et extrapolation à $n \infty$ (—○—); (b) Conath 2 pour $\Lambda = 0.1$ et $\chi = 10^4$ (—●—).

dans le cas $Ra^* = 200$, $H/L = 1$ conduit à une valeur $Nu_{1,4}^*(5) = 3,396$ pratiquement égale à la valeur de $\overline{Nu}_{1,4}^*$. Une extrapolation faite à l'aide des valeurs \overline{Nu}_n^* correspondant à différents maillages ($n = 14, 17, 20$ et 24) permet de situer la valeur réelle du nombre de Nusselt obtenu pour un maillage idéal infini \overline{Nu}_∞^* à environ 3,71, soit une valeur supérieure d'environ 9 pour cent à $Nu_{1,4}^*(5)$.

5. RESULTATS

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3.3, les mouvements thermoconvectifs étudiés à l'aide du modèle Conath 2 dépendent de quatre nombres sans dimension Ra^* , A , Λ et χ . Compte tenu des éléments présentés aux paragraphes 3.3 et 4, les différentes étapes de la mise en œuvre du modèle ont consisté à analyser successivement :

- l'influence du nombre de Rayleigh,
- l'influence de la taille réduite du rouleau convectif H/L ,
- l'influence des paramètres Λ et χ dans un cas particulier.

5.1 Influence du nombre de Rayleigh

Comme lors des essais numériques effectués avec le modèle Conath 1, nous avons vérifié que le nouveau modèle rend bien compte des conditions d'apparition de la convection, le nombre de Nusselt n'étant supérieur à 1 que lorsque Ra^* est supérieur à 40.

Pour étudier l'influence des paramètres physiques sur les transferts par convection, nous avons choisi une valeur du nombre de Rayleigh égale à 200, valeur qui correspond à un écoulement thermoconvectif stable, suffisamment éloignée des conditions d'apparition du régime thermique fluctuant [9].

5.2 Influence de la taille réduite du rouleau convectif

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1, pour un nombre de Rayleigh donné, le nombre de Nusselt calculé à l'aide de Conath 1, dépend de H/L et passe par un maximum Nu_m^* pour une valeur $(H/L)_m$ supérieure ou égale à 1, maximum qui a été retenu pour la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux [3]. $(H/L)_m$ est une fonction croissante de Ra^* : cette tendance qui est en accord avec des observations expérimentales portant sur la taille réelle des rouleaux étudiés, apparaît cependant exagérée puisque $(H/L)_m$ croît beaucoup plus vite lorsque Ra^* croît, que ne le font les valeurs réelles de H/L déterminées expérimentalement.

Les résultats obtenus à l'aide du modèle numérique Conath 2 (Fig. 5) confirment les informations recueillies à l'aide de Conath 1, mais semblent cerner davantage la réalité. Dans le cas étudié $(H/L)_m$ se situe aux environs de 1,5 alors qu'avec Conath 1 nous avons

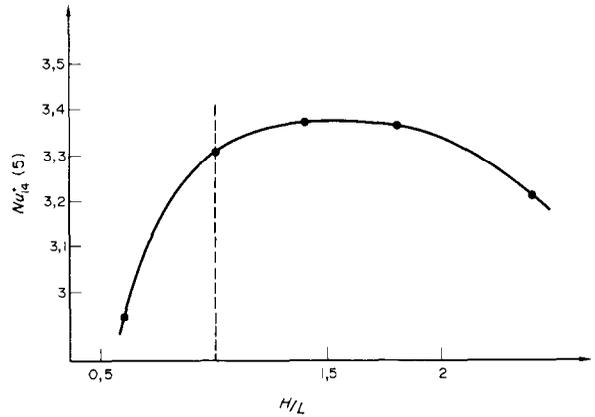


FIG. 5. Influence de la taille réduite H/L sur le transfert de chaleur: Conath 2 avec $n = 14$, $\Lambda = 0,5$, $\chi = 10^3$ et $Ra^* = 200$.

obtenu 1,65. Les résultats expérimentaux quant à eux semblent indiquer, toujours dans ce cas, que H/L est de l'ordre de grandeur de 1,1 pour $Ra^* \approx 200$ [8].

Resterait, bien sûr, à apprécier pour la même valeur de Ra^* l'influence sur $(H/L)_m$ des différents paramètres physiques (Λ et χ) ou numérique (n). Compte-tenu du fait que cette analyse n'a pas été faite et qu'au demeurant la différence entre $[Nu_{1,4}^*(15)]_m$ et $Nu_{1,4}^*(5)$ pour $H/L = 1$ reste faible (Fig. 5), nous avons choisi de réaliser les autres essais numériques (paragraphe 5.3) avec $H/L = 1$ valeur ayant un support théorique simple, puisqu'elle définit la taille des rouleaux à l'apparition de la convection.

5.3 Réseau $Nu^* = f(\Lambda, \chi, Ra^* = 200, A = 1)$

Les résultats présentés sur les Figs. 6 et 7 mettent nettement en évidence l'influence des paramètres χ et Λ sur le transfert de chaleur moyen. Cette influence qui se traduit de manière semblable pour chacune de ces grandeurs (le nombre de Nusselt étant aussi bien une fonction croissante de χ que de Λ), peut s'expliquer simplement en examinant les conditions d'échanges entre phases.

Influence de χ . Le paramètre Λ étant fixé, lorsque le nombre adimensionnel χ croît, ce qui revient à améliorer les conditions d'échange entre phases, le milieu poreux tend à se comporter comme un milieu continu unique et les résultats fournis par Conath 2 tendent vers ceux données par Conath 1. Pour ces conditions, les valeurs de Λ ont de moins en moins d'influence sur le nombre de Nusselt. Dans le domaine prospecté ($0,05 < \Lambda < 2$) cette influence reste limitée aux valeurs de $\chi < 10^5$.

Influence de Λ . L'influence de Λ sur Nu^* peut s'expliquer en considérant les participations relatives

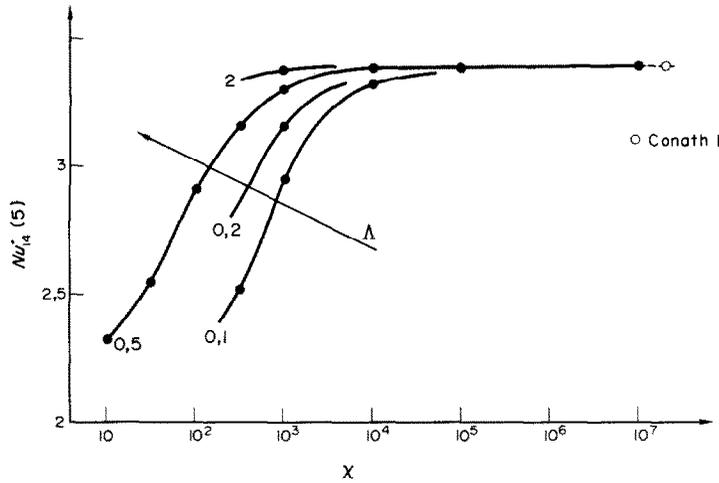


FIG. 6. Relations $Nu^*-\chi$ pour différentes valeurs de Λ ($Ra^* = 200, H/L = 1$).

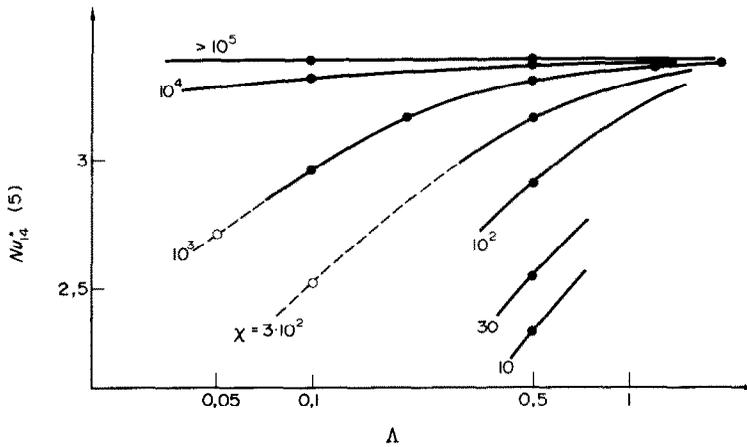


FIG. 7. Relations $Nu^*-\Lambda$ pour différentes valeurs de χ ($Ra^* = 200; H/L = 1$).

de la phase solide et de la phase liquide au transfert de chaleur global; si, par exemple, λ_s^* restant constant, λ_s^* croît (Λ décroît donc), le transfert par conduction dans la phase solide prend une part relative plus importante dans le transfert de chaleur global et, compte tenu de la définition même du nombre de Nusselt, celui-ci décroît; en effet, si λ_s^* tend vers l'infini la participation du fluide au transfert, avec ou sans convection, devient négligeable et le nombre de Nusselt tend vers 1.

6. ANALYSE PHYSIQUE DES RESULTATS

Le choix des valeurs satisfaisantes du coefficient h et du rapport Λ constitue les difficultés principales à surmonter pour l'obtention de résultats quantitatifs significatifs, à l'aide du modèle présenté. Cependant, dès maintenant, certains résultats peuvent être considérés comme acquis.

6.1 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Comme nous l'avons vu au paragraphe 5.3, le comportement du modèle proposé est physiquement satisfaisant quand on s'intéresse à son aptitude à bien décrire l'influence de χ et Λ sur le transfert de chaleur. En particulier, il est désormais possible, malgré les difficultés pratiques d'estimation de ces paramètres, d'expliquer les positions relatives des différentes courbes Nusselt-Rayleigh obtenues par voie expérimentale (Annexe B). On notera, toutefois, que les valeurs numériques sont sensiblement inférieures aux valeurs expérimentales.

6.2 Zones privilégiées d'échange de chaleur solide-fluide

Les distributions de température calculées mettent en évidence que l'écart entre la température du solide et celle du fluide est maximal dans deux domaines particuliers d'un rouleau (Fig. 8), la partie haute du

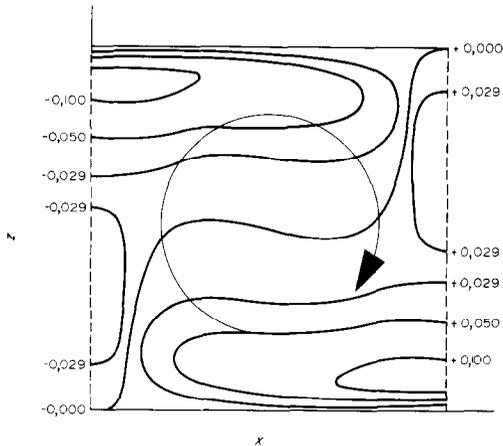


FIG. 8. Différence $(\Theta - \theta)$ entre températures adimensionnelles du solide et du fluide dans le cas $Ra^* = 200$, $A = 1$, $\Lambda = 0,5$ et $\chi = 10^3$.

courant ascendant et la partie basse du courant descendant. Ce résultat, intuitivement prévisible, est important, car il met explicitement en évidence le rôle d'«échangeur» joué par la phase solide dans ces deux domaines.

6.3 Influence du degré de division du milieu poreux

L'influence du degré de division du milieu poreux peut être mise en évidence en examinant l'évolution du paramètre global χ en fonction des différents grandeurs qui interviennent dans la relation de définition :

$$\chi = \frac{hK}{\lambda^*} \cdot \frac{H^2}{K} \quad (12)$$

En effet, si, pour un milieu poreux de texture donnée (Λ constant), on suppose que la vitesse de filtration n'a pas d'influence sur le coefficient de transfert h , la valeur du nombre χ dépend directement de H^2/K qui rend compte du degré de division du milieu poreux. Compte-tenu de la relation $Nu^* = f(\chi, \Lambda)$ examinée au paragraphe précédent (Nu^* indépendant de Λ lorsque χ tend vers l'infini), plus le degré de division sera grand plus son comportement sera susceptible d'être décrit par l'équation (1).

Ce résultat est extrêmement important et il convient d'en tenir compte dans toute modélisation aussi bien expérimentale que numérique des effets convectifs. En particulier, lors de la *modélisation expérimentale* d'un cas réel où le seul paramètre de similitude considéré jusqu'à maintenant était le nombre de Rayleigh, il convient d'apprécier l'influence de H^2/K pour définir la qualité de la similitude. On notera d'ailleurs que, très souvent, pour adapter les nombres de Rayleigh, l'expérimentateur est conduit à modifier considérablement la valeur de ce dernier rapport, modification qui

peut, éventuellement se traduire par l'obtention de valeurs de nombres de Nusselt non représentatives de la réalité.

7. CONCLUSIONS

Le modèle mathématique, généralement utilisé pour étudier la convection naturelle en milieu poreux, est constitué par l'équation de Darcy en régime permanent et par une équation unique représentant le transfert de chaleur. En outre, des hypothèses complémentaires sont adoptées: tenseur de conductivité thermique supposé sphérique et indépendant de la vitesse de filtration, coefficients constants.

Si les résultats que permet d'obtenir ce modèle simplifié sont intéressants, ils ne traduisent cependant que très imparfaitement la réalité. Plusieurs possibilités d'amélioration sont alors envisageables:

1. améliorer la description de l'écoulement en milieu poreux dans les zones à forts gradients thermiques,
2. tenir compte d'effets tels que les variations des caractéristiques en fonction de la température; les modèles numériques prenant en compte ces effets [10] ont montré qu'ils ont une importance relativement faible,
3. tenir compte du fait que le tenseur λ^* n'est pas sphérique d'une part, et dépend, d'autre part, de la vitesse de filtration,
4. distinguer, à l'aide d'un modèle simple à coefficient de transfert constant, les températures moyennes des phases solide et fluide,
5. développer un modèle plus exact que le précédent, prenant en compte l'influence des vitesses de filtration sur la valeur du coefficient de transfert.

Nous avons présenté ici les premières solutions obtenues en suivant la voie 4 qui nous a semblé relativement féconde [11]. Ces solutions, qui sont imparfaites pour des raisons, tant physiques que numériques, nous ont, cependant, permis de mettre en évidence deux éléments qui nous paraissent essentiels:

- l'existence de zones où les échanges entre fluide et solide sont très importants,
- l'influence du degré de division du milieu poreux sur le transfert de chaleur moyen.

Remerciements—Le modèle présenté a été réalisé dans le cadre des activités de recherche du "Groupe d'Etude I.F.P.—I.M.F. sur les milieux Poreux". Ce groupe, financé par l'Institut Français du Pétrole à Rueil-Malmaison et l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Laboratoire associé au C.N.R.S., a été mis en place en 1971 à l'E.N.S.E.E.I.H.T. de Toulouse.

REFERENCES

1. K. J. Schneider, Investigation of the influence of free thermal convection on heat transfer through granular material—XIth International Congress of Refrigeration, Paper 11. 4, Munich (1963).

2. S. Bories, Sur les mécanismes fondamentaux de la convection naturelle en milieu poreux, Thèse, Toulouse (Juillet 1970).
3. M. Combar nous, Convection naturelle et convection mixte en milieu poreux, Thèse, Paris, Editions TECHNIP (Novembre 1970).
4. K. Aziz, P. H. Holst et P. S. Karra, Natural convection in porous media, Petroleum Soc. of C.I.M., Paper 6813 (1968).
5. M. Combar nous, Convection naturelle et convection mixte dans une couche poreuse horizontale, *Rev. Gén. Thermique* **108**, 1335-1355 (1970).
6. M. Combar nous et P. Bia, Combined free and forced convection in porous media, *J. Soc. Petrol. Engrs.* **4**, 399-405 (1971).
7. M. P. Vlasuk, Transfert de chaleur par convection dans une couche poreuse, Communication 1.49, 4ème Conférence de l'Union Soviétique sur le Transfert de chaleur et de Masse, Minsk (Mai 1972) (Traduction Institut de Transfert de chaleur et de masse à Minsk, Groupe d'Etude I.F.P.-I.M.F. sur les Milieux Poreux à Toulouse).
8. S. Bories, M. Combar nous et J. Y. Jaffrenou, Observation des différentes formes d'écoulements thermoconvectifs dans une couche poreuse inclinée, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **275A**, 857-860 (1972).
9. S. A. Bories et M. A. Combar nous, Natural convection in a sloping porous layer, *J. Fluid Mech.* **57**(1), 63-79 (1973).
10. P. H. Holst, A theoretical and experimental investigation of natural convection in porous media, Thèse, Calgary (1970).
11. M. Combar nous, Description du transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **275A**, 1375-1378 (1972).
12. J. J. Barker, Heat transfer in packed beds, *Ind. Engrng Chem.* **57**(4), 43-51 (1965).

ANNEXE A

A.1 Distribution des températures

L'ensemble des relations aux différences correspondant aux équations de transfert de chaleur pour tous les noeuds du maillage se présente sous la forme matricielle:

$$|\mathcal{A}| \cdot |\text{TETA}_i(\tau + \Delta\tau)| = |\text{TETA}_i(\tau)| \tag{A.1}$$

$|\text{TETA}_i(\tau)|$ et $|\text{TETA}_i(\tau + \Delta\tau)|$, matrices unicolonnes, représentent l'ensemble des températures des phases fluide et solide, aux instants τ et $\tau + \Delta\tau$. L'indice i est associé aux indices I et J du maillage à deux dimensions (Fig. 3). A une valeur impaire de i correspond une température du fluide en un point (I, J) du maillage:

$$i = 2[(J-2)(n-1) + I - 1] - 1 \tag{A.2}$$

avec, en particulier:

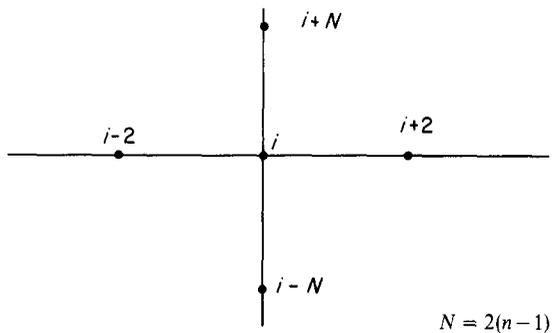
$$\text{TETA}_1 = \theta_{2,2}.$$

A une valeur paire de i correspond une température de la phase solide:

$$i = 2[(J-2)(n-1) + I - 1]. \tag{A.3}$$

Dans la suite du texte, nous utilisons indifféremment, pour désigner un noeud du maillage, l'indice unique i ou le couple d'indices (I, J) .

La matrice $|\mathcal{A}|$ est une matrice bande dont les coefficients correspondant au point courant du maillage sont calculés à partir des équations (8), (9) soit, avec les notations d'indice présentées sur le schéma:



Pour les valeurs impaires de i :

$$\begin{aligned} & \theta_{i-N} \left[\frac{-\Delta\tau}{\omega\Delta x^2} - \frac{A\Delta\tau}{2\omega\Delta x} W_{i,J}^\circ \right] \\ & + \theta_{i-2} \left[\frac{-\Delta\tau A^2}{\omega\Delta x^2} - \frac{A\Delta\tau}{2\omega\Delta x} U_{i,J}^\circ \right] \\ & + \theta_i \left[2 \frac{\Delta\tau}{\omega\Delta x^2} (1 + A^2) + \frac{\chi\Delta\tau}{\omega} + 1 \right] \\ & + \theta_{i+1} \left[\frac{-\chi\Delta\tau}{\omega} \right] \\ & + \theta_{i+2} \left[\frac{-\Delta\tau A^2}{\omega\Delta x^2} + \frac{A\Delta\tau}{2\omega\Delta x} U_{i,J}^\circ \right] \\ & + \theta_{i+N} \left[\frac{-\Delta\tau}{\omega\Delta x^2} + \frac{A\Delta\tau}{2\omega\Delta x} W_{i,J}^\circ \right] = \theta_i^\circ. \tag{A.4} \end{aligned}$$

Pour les valeurs paires de i :

$$\begin{aligned} & \Theta_{i-N} \left[\frac{-\Delta\tau}{\Omega\Delta x^2} \right] + \Theta_{i-2} \left[\frac{-\Delta\tau A^2}{\Omega\Delta x^2} \right] \\ & + \Theta_{i-1} \left[\frac{-\chi\Lambda\Delta\tau}{\Omega} \right] \\ & + \Theta_i \left[2 \frac{\Delta\tau}{\Omega\Delta x^2} (1 + A^2) + \frac{\chi\Lambda\Delta\tau}{\Omega} + 1 \right] \\ & + \Theta_{i+2} \left[\frac{-\Delta\tau A^2}{\Omega\Delta x^2} \right] + \Theta_{i+N} \left[\frac{-\Delta\tau}{\Omega\Delta x^2} \right] = \Theta_i^\circ. \tag{A.5} \end{aligned}$$

Dans les équations (A.4) et (A.5) θ_i et Θ_i désignent l'élément indicé i de la matrice $|\text{TETA}_i(\tau + \Delta\tau)|$. Cette distinction d'écriture entre température du fluide (θ_j avec j impair) et celle du solide (Θ_j avec j pair) a été maintenue dans un souci de clarté. L'exposant $^\circ$ appliqué à θ_i ou Θ_i , quant à lui, indique la valeur d'une température $\text{TETA}_i(\tau)$.

Le système linéaire (A.1) est résolu en utilisant la méthode de Gauss.

A.2 Calcul de la fonction de courant

L'équation (6) est remplacée par la relation aux différences:

$$\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + A^2 \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta x^2} + ARa^* \frac{1+\Lambda}{\Lambda} \frac{\theta_{i+2} - \theta_{i-2}}{2\Delta x} = 0. \quad (A.6)$$

La distribution des fonctions Ψ est calculée par surrelaxation par point, la fonction $\Psi_{i,j}$ à l'itération $r + 1$ étant évaluée par [4]:

$$\Psi_{i,j}^{r+1} = \Psi_{i,j}^r + \frac{\omega}{2(1+A^2)} \left\{ \Psi_{i,j-1}^{r+1} + \Psi_{i,j+1}^r - 2(1+A^2)\Psi_{i,j}^r + A^2(\Psi_{i-1,j}^{r+1} + \Psi_{i+1,j}^r) + \frac{ARa^*\Delta x}{2} \frac{1+\Lambda}{\Lambda} (\theta_{i+2} - \theta_{i-2}) \right\}. \quad (A.7)$$

La valeur ω du coefficient de surrelaxation utilisée n'a pas été calculée directement; nous avons utilisé l'expression donnée par Young [4] dans le cas d'un maillage rectangulaire, soit:

$$\omega = 2 / \left[1 + \sqrt{1 - \left[\frac{1}{2} \cos(A\Pi\Delta x) + \frac{1}{2} \cos(\Pi\Delta x) \right]} \right]. \quad (A.8)$$

Pour un temps fictif donné, la distribution de température étant déterminée, le processus itératif de calcul de la fonction de courant est poursuivi jusqu'à ce que le nombre d'itérations soit égal à 50 ou que la valeur maximale des $|\Psi_{i,j}^{r+1} - \Psi_{i,j}^r|$ dans le domaine de calcul soit inférieure à 10^{-9} .

A.3 Champ de vitesse

Le champ de vitesse est déterminé à l'aide des équations (7) qui définissent les deux composantes du vecteur vitesse:

$$U_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} [\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}] \quad (A.9)$$

$$W_{i,j} = \frac{-1}{2\Delta x} [\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}]$$

lorsque:

$$1 < I < n+1 \quad \text{et} \quad 1 < J < n+1.$$

D'autre part, aux limites verticales du modèle, les vitesses sont exprimées à l'aide de:

$$W_{1,j} = -\Psi_{2,j}/\Delta x; \quad W_{n+1,j} = \Psi_{n,j}/\Delta x \quad (A.10)$$

$$1 < J < n+1.$$

Les composantes horizontales de la vitesse sur les plaques horizontales ne sont pas calculées.

A.4 Conditions initiales

A l'instant $\tau = 0$ nous choisissons une solution diffèrent du repos pour préciser le sens de rotation des mouvements convectifs. Nous utilisons une distribution de température cohérente et calculons ensuite le champ Ψ qui lui est associé. La distribution initiale de température choisie est de la forme:

$$TETA_i = TETA_{i+1} = 1 - z + \alpha \left(\frac{1}{2} - x \right) \sin(\Pi z) \quad (A.11)$$

avec i impair. La valeur de α généralement utilisée est 0,05.

A.5 Transfert de chaleur global

Compte-tenu de l'importance des temps de calcul nécessités avec ce modèle numérique pour l'obtention d'un régime permanent (de 200 à 300 s sur ordinateur CDC 6600), nous avons choisi le maillage le moins dense possible ($n = 14$) permettant de fournir des résultats satisfaisants. Or, la réduction du maillage se traduit par une distorsion importante du modèle par rapport à la réalité (Fig. 4) et conduit à des incertitudes sur la représentativité physique des grandeurs calculées numériquement. Ces incertitudes sont encore plus sensibles sur les valeurs des "dérivées" de ces grandeurs, lorsque ces "dérivées" sont calculées en un noeud du maillage à partir des valeurs de grandeurs numériques aux noeuds voisins. C'est pour cette raison, que nous avons calculé le transfert de chaleur à travers chaque ligne horizontale traversant un rouleau convectif ($J = \text{constante}$), soit $Nu_n^*(J)$. L'évolution de $Nu_n^*(J)$ en fonction de J constitue alors une information intéressante: la finesse du maillage serait parfaitement satisfaisante si, en régime permanent, $Nu_n^*(J)$ était indépendant de J .

Les transferts par conduction sont liés aux gradients de température et le transfert dû au terme convectif dépend des composantes verticales de la vitesse du fluide le long de la ligne J . Si $NUF_n(J)$, $NUS_n(J)$ et $NUC_n(J)$ désignent respectivement, exprimées sous forme adimensionnelle:

— les contributions au transfert de chaleur des gradients thermiques dans la phase fluide et solide soit:

$$NUF_n(J) = \frac{\theta_{1,j-1} - \theta_{1,j+1}}{4} + \sum_{i=2}^n \frac{\theta_{i,j-1} - \theta_{i,j+1}}{2} + \frac{\theta_{n+1,j-1} - \theta_{n+1,j+1}}{4} \quad (A.12)$$

$$NUS_n(J) = \frac{\Theta_{1,j-1} - \Theta_{1,j+1}}{4} + \sum_{i=2}^n \frac{\Theta_{i,j-1} - \Theta_{i,j+1}}{2} + \frac{\Theta_{n+1,j-1} - \Theta_{n+1,j+1}}{4} \quad (A.13)$$

— la contribution des termes de convection, soit

$$NUC_n(J) = A\Delta x \left[\frac{W_{1,j}\theta_{1,j}}{2} + \sum_{i=2}^n W_{i,j}\theta_{i,j} + \frac{W_{n+1,j}\theta_{n+1,j}}{2} \right]. \quad (A.14)$$

Alors:

$$Nu_n^*(J) = [NUS_n(J) + \Lambda \{NUF_n(J) + NUC_n(J)\}] / (1 + \Lambda). \quad (A.15)$$

ANNEXE B

Dans cette annexe sont rassemblés quelques éléments quantitatifs concernant la comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux. On y trouvera successivement: les résultats expérimentaux, une estimation des coefficients h , une estimation très succincte des rapports Λ et la comparaison des résultats numériques et expérimentaux.

B.1 Résultats expérimentaux

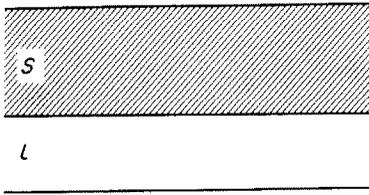
D'après les résultats expérimentaux (Fig. 2) ou leur extrapolation, les valeurs du nombre de Nusselt correspondant à $Ra^* = 200$ ont été obtenues soit:

Série	\bar{d} (mm)	ε	Solide-liquide	Nu^*
2	1,7	0,385	Verre-Eau	4,0
4	4	0,360	Polypropylène-Eau	5,6
6	4	0,371	Verre-Eau	4,3
7	2	0,351	Verre-Huile	4,3
8	0,9	0,359	Verre-Huile	5,45
9	4	0,370	Plomb-Eau	3,3
11	3	0,381	Verre-Eau	3,9
12	1,9	0,350	Quartz-Huile	3,9
13	1,9	0,350	Quartz-Eau	2,8
5	2,25	{0,335}	Quartz-Eau	3,5
14				

B.2 Estimation des coefficients h

Nous avons eu recours pour estimer la valeur du coefficient h à deux approches:

—l'analyse *bibliographique* des données existant dans le domaine du génie chimique. Les résultats concernant le coefficient de transfert solide-fluide, exprimés en terme de facteur de Colburn j sont très nombreux [12] mais correspondent à une gamme de vitesse différente de celle de notre



étude (dans [12], $Re^* \in [10-10^4]$). Une extrapolation des résultats présentés dans [12] conduit, pour un nombre de Reynolds de filtration voisin de 1 à une valeur de j de l'ordre de grandeur de l'unité. Nous retiendrons de cette analyse que la gamme de vitesse couverte par les travaux de génie chimique est très différente de celle correspondant à nos préoccupations et que le coefficient h est une fonction de la vitesse d'écoulement. Il existe, d'autre part, dans la gamme où les mesures de h ont été faites, de très grands écarts entre les résultats présentés par les différents auteurs même pour des conditions expérimentales analogues. L'extrapolation de tels résultats ne peut donc que servir de guide et est incapable de donner des résultats quantitatifs satisfaisants.

—dans le cadre de notre étude où les vitesses de filtration sont relativement faibles à tel point qu'il est possible, en première approximation, de négliger leur influence sur la valeur de h , une *estimation naïve* de ce coefficient a été effectuée en supposant le milieu poreux constitué de strates liquide et solide d'épaisseur constante $\varepsilon d/2$ et $(1-\varepsilon)d/2$ où d est le diamètre moyen du grain constituant le milieu. Un

volume unitaire de milieu poreux est alors représenté par la juxtaposition de deux strates dont la surface d'interface est égale à $2/d = a$.

Pour un régime thermique permanent établi entre ces deux strates évaluons le flux de chaleur échangé entre le solide et le fluide, par unité de volume de milieu poreux (Figure).

—description microscopique:

$$\Phi = a\lambda_s \frac{T_1 - T_2}{(1-\varepsilon)d/2} = a\lambda_f \frac{T_2 - T_3}{\varepsilon d/2} \quad (\text{B.1})$$

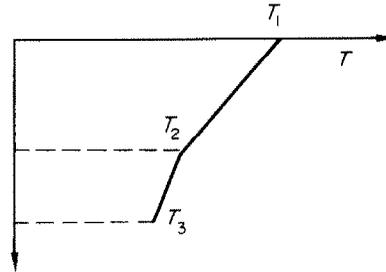
—description macroscopique à l'aide du coefficient de transfert:

$$\Phi = h(\bar{T}_s - \bar{T}_f) = h\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_2 + T_3}{2}\right). \quad (\text{B.2})$$

D'où h par élimination:

$$h = \frac{4}{d^2} \left[\frac{\varepsilon}{\lambda_f} + \frac{1-\varepsilon}{\lambda_s} \right] \quad (\text{B.3})$$

Les valeurs de h retenues pour l'estimation de χ ont été choisies en tenant compte des indications fournies par l'analyse bibliographique et par l'application de la formule (B.3). La gamme des valeurs de χ (voir tableau) est comparable à celle correspondant aux essais expérimentaux.



B.3 Estimation de Λ

Comme nous l'avons indiqué dans le texte les coefficients de conductivité équivalente λ_f^* et λ_s^* dépendent à la fois de λ_f et λ_s mais aussi du degré de dispersion des phases constituant le milieu poreux. Pour la restitution des résultats numériques, nous avons choisi *empiriquement* les valeurs du paramètre Λ en nous laissant guider par:

- la connaissance de λ_f et λ_s ,
- la connaissance de λ^* [3],
- l'existence de la relation (4).

Les valeurs retenues sont indiquées dans le tableau suivant.

B.4 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Les valeurs théoriques du nombre de Nusselt ont été obtenues par interpolation des réseaux des Figs. 6 et 7.

La corrélation entre les valeurs calculées et expérimentales du nombre de Nusselt, sans être exceptionnelle est cependant forte; le coefficient de corrélation est en effet de 0,758.

Série	$\lambda_f - \lambda_s$ ($10^{-3} \text{ W/cm}^3 \text{ } ^\circ\text{C}$)	h ($\text{W/cm}^3 \text{ } ^\circ\text{C}$)	Λ	χ	\overline{Nu}_A^* théorique	Nu^* expérimental
4	6 - 3	0,0092	1	43,7	3,25	5,6
8	1,5- 15	0,171	0,2	3260	3,32	5,45
7	1,5- 15	0,0345	0,2	657	3,11	4,3
6	6 - 15	0,024	0,45	114	2,88	4,3
2	6 - 15	0,133	0,45	635	3,24	4,0
11	6 - 15	0,0428	0,45	204	3,03	3,9
12	1,5- 60	0,043	0,1	817	2,87	3,9
14	6 - 60	0,109	0,1	520	2,66	3,5
9	6 -350	0,0393	0,1	187	2,39	3,3
13	6 - 60	0,153	0,1	730	2,91	2,8

A MODELIZATION OF NATURAL CONVECTION INSIDE A HORIZONTAL POROUS LAYER USING A SOLID-FLUID TRANSFER COEFFICIENT

Abstract—The concept of transfer coefficient for the modelization of thermoconvective patterns in porous medium for steady flow was used. The influence on mean heat transfer of the medium division degree and thermal characteristics of the constitutive phases was evidenced by numerical data, widely representative of experimental reality.

EIN MODELL FÜR DIE FREIE KONVEKTION INNERHALB EINER EBENEN PORÖSEN SCHICHT AUF DER GRUNDLAGE DES FESTKÖRPER-FLUID-ÜBERTRAGUNGSKOEFFIZIENTEN

Zusammenfassung—Zur Beschreibung der stationären Thermokonvektion in porösen Stoffen wurde vom Begriff eines Wärmeübergangskoeffizienten ausgegangen. Es wurde der Einfluß der Porosität und der thermischen Stoffwerte der beteiligten Phasen auf den Wärmeübergang berechnet und mit Meßwerten verglichen.

МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВНУТРИ ПЛОСКОГО ПОРИСТОГО СЛОЯ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕНОСА МЕЖДУ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ И ЖИДКОСТЬЮ

Аннотация — Для модельного представления термоконвективных процессов в пористой среде в условиях стационарного течения использовался коэффициент переноса. Полученные численные результаты выявили влияние степени пористости среды и тепловых характеристик фазовых составляющих на среднее значение переноса тепла. Предложенное модельное представление дает хорошее совпадение с экспериментальными данными.